Résolution de l'équation du 2e degré : $\boxed{a x^2+b x+c=0}$, avec *a, b* et *c* des nombres réels. *a* non nul.
On sépare et réarrange les termes :

De nombreux sites Web expliquent comment résoudre cette équation.
Je montrerai une méthode basée sur ce que certain appelle la **4ème identité remarquable**.

La 4ème identité remarquable standard est : $x^2+b x+c = (x + x_1)\cdot(x + x_2)$, avec :

$x_1 + x_2 = b$ et

$x_1 \cdot x_2 = c$

Donc si on trouve deux nombres (x_1 et x_2) tels que leur somme donne b et leur produit donne c, alors la factorisation est simple.

La généralisation intéressante est la suivante : $a x^2+b x+c = a\cdot(x + x_1)\cdot(x + x_2)$

Dans le cas où les nombres a, b et c sont des **entiers**,
comment, dans ce cas-là, trouver x_1 et x_2 ?
Je donne la méthode, j'illustre par des exemples, puis j'explique.

1) on cherche deux **nombres entiers** y_1 et y_2 tels que :

   $y_1 + y_2 = b$ et

   $y_1 \cdot y_2 = a\cdot c$

2) S'ils n'existent pas, alors les racines ($-x_1$ et $-x_2$) sont irrationnelles et il faut utiliser une autre méthode.

3) Sinon, on pose : $x_1 = \dfrac{y_1}{a}$ et $x_2 = \dfrac{y_2}{a}$ et on a la factorisation :

   $a x^2+b x+c = a\cdot(x + x_1)\cdot(x + x_2)$ avec les deux racines rationnelles : ($-x_1$ et $-x_2$).

<u>Exemples :</u>

$P_1 = 3 x^2+8 x+4$

$y_1 + y_2 = 8$ et $y_1 \cdot y_2 = 3\cdot 4=12$; $y_1 = 2$ et $y_2 = 6$ satisfont les conditions.

Donc $3 x^2+8 x+4 = 3\cdot\left(x + \dfrac{2}{3}\right)\cdot\left(x + \dfrac{6}{3}\right) = (3 x + 2)\cdot(x + 2)$, qui se vérifie facilement.

$P_2 = 6 x^2+13 x+6$

$y_1 + y_2 = 13$ et $y_1 \cdot y_2 = 6\cdot 6=36$; $y_1 = 4$ et $y_2 = 9$ satisfont les conditions.

Donc $6 x^2+13 x+6 = 6\cdot\left(x + \dfrac{4}{6}\right)\cdot\left(x + \dfrac{9}{6}\right) = (3 x + 2)\cdot(2 x + 3)$, qui se vérifie facilement.

$P_3 = 3x^2+2x-8$

$y_1 + y_2 = 2$ et $y_1 \cdot y_2 = 3\cdot(-8)=-24$; $y_1 = 6$ et $y_2 = -4$ satisfont les conditions.

Donc $3x^2+2x-8 = 3\cdot\left(x+\frac{6}{3}\right)\cdot\left(x-\frac{4}{3}\right) = (x+2)\cdot(3x-4)$, qui se vérifie facilement.

$P_4 = 6x^2-11x-10$

$y_1 + y_2 = 11$ et $y_1 \cdot y_2 = 6\cdot(-10)=-60$; $y_1 = 4$ et $y_2 = 15$ satisfont les conditions.

Donc $6x^2-11x-10 = 6\cdot\left(x+\frac{4}{6}\right)\cdot\left(x-\frac{15}{6}\right) = (3x+2)\cdot(2x-5)$, qui se vérifie facilement.

<u>Explication de pourquoi cela fonctionne.</u>
On se ramène la la 4ème identité remarquable standard :

$a x^2+b x+c = a\cdot\left(x^2+\frac{b}{a}\cdot x+\frac{c}{a}\right) = a\cdot(x+x_1)\cdot(x+x_2)$ Donc

$x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$ et $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

C'est désagréable, car il y a des fractions. On rappelle qu'on s'intéresse au cas où a, b et c sont entiers.
En multipliant par a la première égalité et par a^2 la deuxième :

$a x_1 + a x_2 = b$ et $a x_1 \cdot a x_2 = a\cdot c$.

Avec $y_1 = a\cdot x_1$ et $y_2 = a\cdot x_2$, on a les conditions exprimées précédemment.

<u>Montrons maintenant, que y_1 et y_2 sont soit des entiers, soit irrationnels.</u>
Je le ferrai de trois manières différentes.
<u>Première manière.</u>
On a : $y_1 + y_2 = b$ et $y_1 \cdot y_2 = a\cdot c$, b et ac sont entiers.

Supposons que : $y_1 = \frac{p_1}{q_1}$ et $y_2 = \frac{p_2}{q_2}$ sont des fractions irréductibles. Donc

$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = b$ donc $p_1\cdot q_2 = b\cdot q_1\cdot q_2 - p_2\cdot q_1$ donc $p_1\cdot q_2 = q_1\cdot(b\cdot q_2 - p_2)$

Donc q_1 divise $p_1\cdot q_2$. Comme les fractions sont irréductibles, cela implique que q_1 divise q_2.
Par un argument symétrique, on montre que q_2 divise q_1.
Conclusion : $q_1 = q_2$. Notons q ce quotient.

On a donc : $\frac{p_1}{q}\cdot\frac{p_2}{q} = a\cdot c$, donc $p_1\cdot p_2 = a\cdot c\cdot q^2$, donc q^2 divise $p_1\cdot p_2$,

donc q divise $p_1\cdot p_2$.
Vu que les fractions sont irréductibles, pour que y_1 et y_2 soient rationnels, la seule possibilité est que $q = 1$ et donc que y_1 et y_2 sont des entiers.
Sinon, y_1 et y_2 sont irrationnels.

Deuxième manière de montrer que y_1 et y_2 sont soit des entiers, soit irrationnels.

Si $a x^2+b x+c = a\cdot(x + x_1)\cdot(x + x_2)$, alors le polynôme s'annule en $-x_1$ et en $-x_2$. $a, b, c\in\mathbb{Z}$

Avec $y_1 = a\cdot x_1$ et $y_2 = a\cdot x_2$, on a :

$a\cdot\left(\frac{y_1}{a}\right)^2-b\cdot\frac{y_1}{a}+c = 0$. Multiplions par a.

$y_1^2-b\cdot y_1+a\cdot c = 0$.

Supposons que : $y_1 = \frac{p}{q}$ soit rationnel irréductible. On va montrer qu'il est alors entier.

On a : $\left(\frac{p}{q}\right)^2-b\cdot\frac{p}{q}+a\cdot c = 0$. Multiplions par q^2.

$p^2-b\cdot p\cdot q+a\cdot c\cdot q^2 = 0$, donc : $q\cdot(-b\cdot p+a\cdot c\cdot q) = -p^2$.

Donc q divise p^2.

Puisque $\frac{p}{q}$ est irréductible, la seule possibilité est que $q = 1$ et donc que y_1 soit entier.

Par symétrie, on peut remplacer y_1 par y_2 pour montrer que y_2 est entier.
Si y_i est rationnel, alors il est forcément entier.

Troisième manière de montrer que y_1 et y_2 sont soit des entiers, soit irrationnels.

Si $a x^2+b x+c = a\cdot(x + x_1)\cdot(x + x_2)$, alors

$a x^2+b x+c = a\cdot x^2+(a\cdot x_1+a\cdot x_2)\cdot x + a\cdot x_1\cdot x_2$

Donc : $a\cdot x_1+a\cdot x_2 = b$ et $a\cdot x_1\cdot x_2 = c$

Avec $y_1 = a\cdot x_1$ et $y_2 = a\cdot x_2$, on a :

$y_1+y_2 = b$ et

$y_1\cdot y_2 = a\cdot c$

Exprimons : $b^2-4\cdot a\cdot c = (y_1+y_2)^2-4\cdot y_1\cdot y_2 = y_1^2+2 y_1\cdot y_2+y_2^2-4\cdot y_1\cdot y_2 = (y_1-y_2)^2$

Ceci montre déjà que s'il y a la factorisation, alors $b^2-4\cdot a\cdot c = (y_1-y_2)^2\geq 0$.

Notons $\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c$. Par symétrie, on peut supposer que $y_1\geq y_2$.

Donc $y_1-y_2 = \sqrt{\Delta}$ et on a vu que : $y_1+y_2 = b$.

C'est un système de deux équations à deux inconnues faciles à résoudre :
On obtient les solutions générales connues d'une équation du second degré :

$y_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $y_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$.

$\sqrt{\Delta}$ est soit entier, soit irrationnel. Reste à montrer que **si** $\sqrt{\Delta}$ **est entier**, alors il est de même parité que b et donc que les deux fractions ci-dessus représentent des entiers.

On a : $\Delta = b^2-4\cdot a\cdot c$. Si b est pair, alors Δ et $\sqrt{\Delta}$ le sont également et

Si b est impair, alors Δ et $\sqrt{\Delta}$ le sont également. Ceci montre que les numérateurs des fractions ci-dessus sont forcément pairs et donc que ces fractions sont entières.

Dans la troisième manière de montrer que y_1 et y_2 sont soit des entiers, soit irrationnels, on a également montré la formule classique qui donne les solutions d'une équation du deuxième degré.

Si $a x^2 + b x + c = 0$, alors

on définit le **discriminant** : $\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

S'il est positif ou nul, alors on a les solutions : $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

S'il est négatif, on a les **solutions complexes** : $x_1 = \frac{-b+i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-i \cdot \sqrt{-\Delta}}{2a}$

i étant "le" nombre "imaginaire" ou "complexe" satisfaisant : $i^2 = -1$.

Ceux qui ne connaissent pas les nombres complexes disent que "l'équation ne possède pas de solutions."
Il faudrait ajouter : "dans $\mathbb{R}$ ".

Dans tous les cas, on a la factorisation : $a x^2 + b x + c = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$.

Il se peut que $x_1 = x_2$. Dans ce cas, le discriminant est nul ($\Delta = 0$) et il n'y a qu'une seule racine, qui est réelle.
On dit que "elle est double", car elle apparaît deux fois dans la factorisation.

Annexe, généralisation :

On peut étendre cette idée pour chercher les solutions rationnelles ($\in \mathbb{Q}$) d'une **équation du troisième degré à coefficients entiers**.

On supposera que les coefficients sont sans facteur commun à tous, sinon, on simplifie.

Exemple : $5x^3+22x^2+26x+7=0$

En multipliant par 5^2 on transforme l'équation en : $(5x)^3+22\cdot(5x)^2+5\cdot 26\cdot(5x)+5^2\cdot 7=0$

En posant $y = 5x$, l'équation devient : $y^3+22\cdot y^2+5\cdot 26\cdot y+5^2\cdot 7=0$.

Les solutions de l'équation initiale sont : $x=\frac{y}{5}$.

Les seules solutions rationnelles de cette équation en y sont :

1) entières

2) des diviseurs de $5 \cdot 7$.

Donc on se limite à faire des calculs avec des nombres entiers, et un choix assez limité.

Dans notre exemple, vu que tous les coefficients sont positifs, les racines sont forcément négatives.

Il n'y a que quatre tests à faire, $y = -1$, $y = -5$, $y = -7$ et $y = -35$.

On trouve que $y = -7$ est une solution, donc on a une solution de l'équation d'origine : $x=-\frac{7}{5}$.

De manière générale, pour résoudre : $ax^3+bx^2+cx+d=0$, à **coefficients entiers**,

On résout : $y^3+b\cdot y^2+a\cdot c\cdot y+a^2\cdot d=0$, en cherchant :

1) des solutions entières

2) qui sont diviseurs de $a \cdot d$.

S'il n'y en a pas, l'équation initiale n'a pas de solution rationnelle.

S'il y a une solution y, alors une solution de l'équation initiale est : $x=\frac{y}{a}$.

Exemple n°2 : $6x^3+13x^2+7x+1=0$

On cherche des solutions de : $y^3+13\cdot y^2+6\cdot 7\cdot y+6^2\cdot 1=0$, qui sont entières et diviseurs de 6.

On trouve une seule solution qui est : $y = -3$.

L'équation initiale a donc une unique solution rationnelle qui est : $x=-\frac{3}{6}=-\frac{1}{2}$.

L'avantage est qu'on se limite à des calculs avec des entiers.

Si l'équation initiale n'a aucune solution rationnelle, alors c'est **compliqué** (mais possible) de trouver les solutions de cette équation.