

Autre manière de calculer des primitives de fonctions, où l'on cherche a posteriori le nombre α pour que $F'(x) = f(x)$.

Déterminez une fonction F qui soit une primitive de la fonction f , c'est-à-dire **par définition** une fonction F telle que $F' = f$.

Quatre propriétés très souvent utilisées sont : (λ est une constante quelconque.)

I) $\int \lambda \cdot g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot G(f(x)) + C$ où G est une primitive de g .

II) $\int \lambda \cdot f^n(x) \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot f^{n+1}(x) + C$ où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

III) $\int \lambda \cdot f^{-1}(x) \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot \ln(|f(x)|) + C$

IV) $\int \lambda \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot e^{f(x)} + C$ Dans chaque cas, α est une constante à déterminer.

1) $f(x) = \frac{5}{3} \cdot x^4 - \frac{3}{4} \cdot x^2 + 1$; $F(x) = \frac{1}{3} \cdot x^5 - \frac{1}{4} \cdot x^3 + x + C$ car $F'(x) = f(x)$
2) $f(x) = (x+1)^2$; $F(x) = \alpha \cdot (x+1)^3$; $F'(x) = \alpha \cdot 3 \cdot (x+1)^2 = f(x)$, donc $\alpha = \frac{1}{3}$ $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (x+1)^3 + C$
3) $f(x) = (2-x)^{12}$; $F(x) = \alpha \cdot (2-x)^{13}$; $F'(x) = \alpha \cdot 13 \cdot (2-x)^{12} \cdot (-1) = f(x)$, donc $\alpha \cdot 13 \cdot (-1) = 1$; $\alpha = -\frac{1}{13}$; $F(x) = -\frac{1}{13} \cdot (2-x)^{13} + C$
4) $f(x) = (1-2x)^2$; $F(x) = \alpha \cdot (1-2x)^3$; $F'(x) = \alpha \cdot 3 \cdot (1-2x)^2 \cdot (-2) = f(x)$, donc $\alpha \cdot 3 \cdot (-2) = 1$; $\alpha = -\frac{1}{6}$; $F(x) = -\frac{1}{6} \cdot (1-2x)^3 + C$
5) $f(x) = (x^2-3x+1)^5 \cdot (2x-3)$; $F(x) = \alpha \cdot (x^2-3x+1)^6$; $F'(x) = \alpha \cdot 6 \cdot (x^2-3x+1)^5 \cdot (2x-3) = f(x)$, donc $\alpha \cdot 6 = 1$; $\alpha = \frac{1}{6}$; $F(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^2-3x+1)^6 + C$
6) $f(x) = (x-1)^{-2}$; $F(x) = \alpha \cdot (x-1)^{-1}$; $F'(x) = \alpha \cdot (-1) \cdot (x-1)^{-2} = f(x)$, donc $\alpha = -1$; $F(x) = -(x-1)^{-1} + C = \frac{-1}{x-1} + C = \frac{1}{1-x} + C$
7) $f(x) = (3x^2+1)^2 \cdot 6x$; $F(x) = \alpha \cdot (3x^2+1)^3$; $F'(x) = \alpha \cdot 3 \cdot (3x^2+1)^2 \cdot 6x = f(x)$, donc $3 \cdot \alpha = 1$; $\alpha = \frac{1}{3}$; $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (3x^2+1)^3 + C$
8) $f(x) = (1-x^2)^3 \cdot 6x$; $F(x) = \alpha \cdot (1-x^2)^4$; $F'(x) = \alpha \cdot 4 \cdot (1-x^2)^3 \cdot (-2x) = f(x)$, donc $\alpha \cdot 4 \cdot (-2) = 6$; $\alpha = -\frac{6}{8} = -\frac{3}{4}$; $F(x) = -\frac{3}{4} \cdot (1-x^2)^4 + C$
9) $f(x) = -\frac{4}{x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x^5}$; $F(x) = \frac{4}{3x^3} + \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{4x^4} + C$ car $F'(x) = f(x)$
10) $f(x) = (1+2x^3)^{-2} \cdot 3x^2$; $F(x) = \alpha \cdot (1+2x^3)^{-1}$; $F'(x) = \alpha \cdot (-1) \cdot (1+2x^3)^{-2} \cdot 6x^2 = f(x)$, donc $\alpha \cdot (-1) \cdot 6 = 3$; $\alpha = -\frac{1}{2}$; $F(x) = -\frac{1}{2} \cdot (1+2x^3)^{-1} + C = \frac{-1}{2 \cdot (1+2x^3)} + C$

11) $f(x) = (4x^2 - 5x)^2 \cdot (16x - 10)$; $F(x) = \alpha \cdot (4x^2 - 5x)^3$; $F'(x) = \alpha \cdot 3 \cdot (4x^2 - 5x)^2 \cdot (8x - 5)$ donc $\alpha \cdot 3 \cdot (8x - 5) = 2 \cdot (8x - 5)$; $\alpha = \frac{2}{3}$; $F(x) = \frac{2}{3} \cdot (4x^2 - 5x)^3 + C$
12) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$; $F(x) = \frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{x^5} + C$
13) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \cdot x = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot x$; $F(x) = \alpha \cdot (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x$ donc $\alpha = \frac{1}{3}$; $F(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C$
14) $f(x) = \sqrt{x} - 1/\sqrt{x}$; $F(x) = (2/3) \cdot \sqrt{x^3} - 2 \cdot \sqrt{x} + C$
15) $f(x) = \sin(3x)$; $F(x) = \alpha \cdot \cos(3x)$; $F'(x) = \alpha \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3$, donc $\alpha = -\frac{1}{3}$; $F(x) = -\frac{1}{3} \cdot \cos(3x) + C$
16) $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + 3 \cdot \cos(x)$; $F(x) = -2 \cdot \cos(x) + 3 \cdot \sin(x) + C$
17) $f(x) = \cos(x) - \sin^2(x) \cdot \cos(x)$; $F(x) = \sin(x) - \alpha \cdot \sin^3(x)$; $F'(x) = \cos(x) - \alpha \cdot 3 \cdot \sin(x)^2 \cdot \cos(x)$, donc $\alpha = \frac{1}{3}$; $F(x) = \sin(x) - \frac{1}{3} \cdot \sin^3(x) + C$
18) $f(x) = \tan^2(x)$; $F(x) = \tan(x) - x + C$, c.f. table CRM ou le cours.
19) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \cos(4x)$; $F(x) = \alpha \cdot \sin(4x)$; $F'(x) = \alpha \cdot \cos(4x) \cdot 4$, donc $\alpha \cdot 4 = \frac{1}{2}$; $\alpha = \frac{1}{8}$; $F(x) = \frac{1}{8} \cdot \sin(4x) + C$
20) $f(x) = \sin^5(x) \cdot \cos(x)$; $F(x) = \alpha \cdot \sin^6(x)$; $F'(x) = \alpha \cdot 6 \cdot \sin^5(x) \cdot \cos(x)$, donc $\alpha = \frac{1}{6}$; $F(x) = \frac{1}{6} \cdot \sin^6(x) + C$
21) $f(x) = \cos^2(x/2) \cdot \sin(x/2)$; $F(x) = \alpha \cdot \cos^3(x/2)$; $F'(x) = \alpha \cdot 3 \cdot \cos^2(x/2) \cdot (-\sin(x/2)) \cdot (1/2)$ donc $\alpha \cdot 3 \cdot (-1) \cdot (1/2) = 1$; $\alpha = -\frac{2}{3}$; $F(x) = -\frac{2}{3} \cdot \cos^3(x/2) + C$
22) $f(x) = (1 + \cos(x))^{-2} \cdot \sin(x)$; $F(x) = \alpha \cdot (1 + \cos(x))^{-1}$; $F'(x) = \alpha \cdot (-1) \cdot (1 + \cos(x))^{-2} \cdot (-\sin(x))$ donc $\alpha = 1$; $F(x) = (1 + \cos(x))^{-1} = 1/(1 + \cos(x))$
23) $f(x) = (2x - 5)^{-1}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(2x - 5)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{2x - 5} \cdot 2$; donc $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(2x - 5) + C$
24) $f(x) = \cos^{-1}(x) \cdot (-\sin(x))$; $F(x) = \ln(\cos(x)) + C$
25) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1} \cdot 3x$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(x^2 + 1)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x$; donc $\alpha \cdot 2 = 3$; $\alpha = \frac{3}{2}$; $F(x) = \frac{3}{2} \cdot \ln(x^2 + 1) + C$
26) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$; $F(x) = \alpha \cdot e^{x^2}$; $F'(x) = \alpha \cdot e^{x^2} \cdot 2x$; donc $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$