

Autre manière de calculer des primitives de fonctions, où l'on cherche a posteriori le nombre α pour que $F'(x) = f(x)$.

Déterminez une fonction F qui soit une primitive de la fonction f , c'est-à-dire **par définition** une fonction F telle que $F' = f$.

Quatre propriétés très souvent utilisées sont : (λ est une constante quelconque.)

I) $\int \lambda \cdot g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot G(f(x)) + C$ où G est une primitive de g .

II) $\int \lambda \cdot f^n(x) \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot f^{n+1}(x) + C$ où $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

III) $\int \lambda \cdot f^{-1}(x) \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot \ln(|f(x)|) + C$

IV) $\int \lambda \cdot e^{f(x)} \cdot f'(x) dx = \alpha \cdot e^{f(x)} + C$ Dans chaque cas, α est une constante à déterminer.

1) $f(x) = x - 3 \cdot x^{-2}$; $F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{3}{x} + C$ car $F'(x) = f(x)$
2) $f(x) = 2x + 1 - x^{-2}$; $F(x) = x^2 + x + \frac{1}{x} + C$ car $F'(x) = f(x)$
3) $f(x) = (3x+2)^6$; $F(x) = \alpha \cdot (3x+2)^7$; $F'(x) = \alpha \cdot 7 \cdot (3x+2)^6 \cdot 3$, donc $\alpha \cdot 7 \cdot 3 = 1$; $\alpha = \frac{1}{21}$; $F(x) = \frac{1}{21} \cdot (3x+2)^7 + C$
4) $f(x) = \sin(x) \cdot \cos^4(x)$; $F(x) = \alpha \cdot \cos^5(x)$; $F'(x) = \alpha \cdot 5 \cdot \cos^4(x) \cdot (-\sin(x))$, donc $\alpha \cdot 5 \cdot (-1) = 1$; $\alpha = -\frac{1}{5}$; $F(x) = -\frac{1}{5} \cdot \cos^5(x) + C$
5) $f(x) = (x^2+x+3)^{-2} \cdot (2x+1)$; $F(x) = \alpha \cdot (x^2+x+3)^{-1}$; $F'(x) = \alpha \cdot (-1) \cdot (x^2+x+3)^{-2} \cdot (2x+1)$, donc $\alpha \cdot (-1) = 1$; $\alpha = -1$; $F(x) = -\frac{1}{x^2+x+3} + C$
6) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+4}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(x^2-2x+4)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2-2x+4} \cdot (2x-2)$, donc $\alpha \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2-2x+4) + C$
7) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x-2}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(x^2-x-2)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2-x-2} \cdot (2x-1)$, donc $\alpha = 1$; $F(x) = \ln(x^2-x-2) + C$
8) $f(x) = \sin(x) \cdot (1-\cos(x))$; $F(x) = \alpha \cdot (1-\cos(x))^2$; $F'(x) = \alpha \cdot 2 \cdot (1-\cos(x)) \cdot \sin(x)$, donc $\alpha \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot (1-\cos(x))^2 + C$
9) $f(x) = \frac{\cos(x)}{(4 \cdot \sin(x) - 1)^3}$; $f(x) = \cos(x) \cdot [4 \cdot \sin(x) - 1]^{-3}$; $F(x) = \alpha \cdot [4 \cdot \sin(x) - 1]^{-2}$; , $F'(x) = \alpha \cdot (-2) \cdot [4 \cdot \sin(x) - 1]^{-3} \cdot 4 \cdot \cos(x)$ donc $\alpha \cdot (-2) \cdot 4 = 1$; $\alpha = -\frac{1}{8}$; $F(x) = -\frac{1}{8} \cdot [4 \cdot \sin(x) - 1]^{-2} = -\frac{1}{8 \cdot [4 \cdot \sin(x) - 1]^2} + C$

10) $f(x) = 1 + \tan^2(2x)$; $F(x) = \frac{\tan(2x)}{2} + C$ c.f. ex. 18 série 5

11) $f(x) = (2x+1)^3$; $F(x) = \alpha \cdot (2x+1)^4$; $F'(x) = \alpha \cdot 4 \cdot (2x+1)^3 \cdot 2$,
donc $\alpha \cdot 4 \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{8}$; $F(x) = \frac{1}{8} \cdot (2x+1)^4 + C$

12) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(|x^2-4|)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2-4} \cdot (2x)$,
donc $\alpha \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(|x^2-4|) + C$

13) $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln(x)}$; $f(x) = \frac{1}{x} \cdot (\ln(x))^{-1}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(|\ln(|x|)|)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{\ln(|x|)} \cdot \frac{1}{x}$,
donc $\alpha = 1$; ; $F(x) = \ln(|\ln(|x|)|) + C$

14) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(|x^2+x+1|)$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \cdot (2x+1)$,
donc $\alpha \cdot (2x+1) = (4x+2)$; $\alpha = 2$; $F(x) = 2 \cdot \ln(|x^2+x+1|) + C$

15) $f(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{2x^2}$; $f(x) = 2 \cdot x^{-3} + \frac{1}{2} \cdot x^{-2}$; $F(x) = 2 \cdot \frac{1}{-2} \cdot x^{-2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-1} \cdot x^{-1}$
 $F(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2 \cdot x}$ car $F'(x) = f(x)$

16) $f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln(|x|)$; $F(x) = \alpha \cdot \ln(|x|)^2$; $F'(x) = \alpha \cdot 2 \cdot \ln(|x|) \cdot \frac{1}{x}$,
donc $\alpha \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{1}{2}$; $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \ln(|x|) + C$

17) $f(x) = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}}$; $F(x) = \alpha \cdot e^{\sqrt{2x}}$; $F'(x) = \alpha \cdot e^{\sqrt{2x}} \cdot (\sqrt{2x})' = \alpha \cdot e^{\sqrt{2x}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{2x}} \cdot 2$,
donc $\alpha = 1$; $F(x) = e^{\sqrt{2x}} + C$

18) $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt{\sin(x)}$; $f(x) = (\sin(x))^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$
 $F(x) = \alpha \cdot (\sin(x))^{\frac{3}{2}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{3}{2} \cdot (\sin(x))^{\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$,
donc $\alpha \cdot \frac{3}{2} = 1$; $\alpha = \frac{2}{3}$; $F(x) = \frac{2}{3} \cdot (\sin(x))^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{\sin^3(x)} + C$

19) $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$; $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}$; $F(x) = \alpha \cdot e^{\frac{1}{x}}$; $F'(x) = \alpha \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'$; $F'(x) = \alpha \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}$,
donc $\alpha \cdot (-1) = 1$; $\alpha = -1$; $F(x) = -e^{\frac{1}{x}} + C$

20) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $f(x) = x^{-\frac{1}{3}}$; $F(x) = \alpha \cdot x^{\frac{2}{3}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$,
donc $\alpha \cdot \frac{2}{3} = 1$; $\alpha = \frac{3}{2}$; $F(x) = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$

21) $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x}$; $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x}$; $f(x) = x+2+\frac{1}{x}$ $F(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 2 \cdot x + \ln(|x|) + C$

22) $f(x) = e^{x^3} \cdot x^2$; $F(x) = \alpha \cdot e^{x^3}$; $F'(x) = \alpha \cdot e^{x^3} \cdot (x^3)' = \alpha \cdot e^{x^3} \cdot 3 \cdot x^2$,
donc $\alpha \cdot 3 = 1$; $\alpha = \frac{1}{3}$; $F(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{x^3} + C$

23) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$; $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{3}}$; $F(x) = \alpha_1 \cdot x^{\frac{4}{3}} + \alpha_2 \cdot x^{\frac{2}{3}}$; $F'(x) = \alpha_1 \cdot \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}} + \alpha_2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}}$
donc $\alpha_1 = \frac{3}{4}$; $\alpha_2 = \frac{3}{2}$; $F(x) = \frac{3}{4} \cdot x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{4} \cdot \sqrt[3]{x^4} + \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} + C$

24) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{2x}$; $f(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} + (2x)^{\frac{1}{2}}$;
 $F(x) = \alpha_1 \cdot x^{\frac{3}{2}} + \alpha_2 \cdot (2x)^{\frac{3}{2}}$; $F'(x) = \alpha_1 \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (2x)^{\frac{1}{2}} \cdot 2$
donc $\alpha_1 = \frac{4}{3}$; $\alpha_2 = \frac{1}{3}$; $F(x) = \frac{4}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3} \cdot (2x)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{4}{3} \cdot \sqrt{x^3} + \frac{1}{3} \cdot \sqrt{(2x)^3} + C$

24) Méthode plus simple en traitant l'expression avant d'intégrer.

$f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{2x}$; $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{x}$; $f(x) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \sqrt{x}$;

$F(x) = (2 + \sqrt{2}) \cdot \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x)^3} + C$ Cette expression est plus simple que celle obtenu ci-dessus.

25) $f(x) = x \cdot \sqrt[3]{ax^2+b}$; $f(x) = (ax^2+b)^{\frac{1}{3}} \cdot x$;
 $F(x) = \alpha \cdot (ax^2+b)^{\frac{4}{3}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{4}{3} \cdot (ax^2+b)^{\frac{1}{3}} \cdot (a \cdot 2 \cdot x)$
donc $\alpha \cdot \frac{4}{3} \cdot a \cdot 2 = 1$; $\alpha = \frac{3}{8a}$; $F(x) = \frac{3}{8a} \cdot (ax^2+b)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{8a} \cdot \sqrt[3]{(ax^2+b)^4} + C$

26) $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$; $f(x) = (x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1)$;
 $F(x) = \alpha \cdot (x^2+x+1)^{\frac{1}{2}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+x+1)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+1)$
donc $\alpha = 2$; $F(x) = 2 \cdot (x^2+x+1)^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{x^2+x+1} + C$

27) $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{9+x^3}}$; $f(x) = (9+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)$;
 $F(x) = \alpha \cdot (9+x^3)^{\frac{1}{2}}$; $F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot (9+x^3)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2)$
donc $\alpha = 2$; $F(x) = 2 \cdot (9+x^3)^{\frac{1}{2}} + C = 2 \cdot \sqrt{9+x^3} + C$

$$28) f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{5x^3+8}} ; f(x) = (5x^3+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (3x^2) ;$$

$$F(x) = \alpha \cdot (5x^3+8)^{\frac{1}{2}} ; F'(x) = \alpha \cdot \frac{1}{2} \cdot (5x^3+8)^{-\frac{1}{2}} \cdot (5 \cdot 3 \cdot x^2)$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{2}{5} ; F(x) = \frac{2}{5} \cdot (5x^3+8)^{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{5x^3+8} + C$$

$$29) f(x) = (3x^2+1) \cdot \sqrt{x^3+x+2} ; f(x) = (x^3+x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+1) ;$$

$$F(x) = \alpha \cdot (x^3+x+2)^{\frac{3}{2}} ; F'(x) = \alpha \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^3+x+2)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2+1)$$

$$\text{donc } \alpha = \frac{2}{3} ; F(x) = \frac{2}{3} \cdot (x^3+x+2)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^3+x+2)^3} + C$$

$$30) f(x) = [x+2\sqrt{x}]^2 ; f(x) = x^2+4\cdot x\cdot\sqrt{x}+4\cdot x = x^2+4\cdot x^{\frac{3}{2}}+4\cdot x$$

Le pré-traitement est indispensable ici !

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3+4\cdot\frac{2}{5}\cdot x^{\frac{5}{2}}+2x^2+C = \frac{1}{3}\cdot x^3+\frac{8}{5}\cdot\sqrt{x^5}+2x^2+C$$